No: 2 : 3 / Magister mathematicae

Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

Als Magisterschrift eingereicht im April 1929 von

Andreas Rennenkampff

Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

I Vorbemerkung.

Die Aufgabe der vorliegenden Schrift sehe ich in folgendem.

Sie soll einem Leser, der mit den sich an die Riemannsche Zetafunktion knüpfenden Problemen nicht vertraut ist, ein möglichst klares Bild von den wichtigsten derselben vermitteln können.

Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, kurz auf die Bedeutung dieser Probleme für die Zahlentheorie einzugehen.

In erster Linie soll hierbei die Frage nach den Nullpunkten dieser Funktion behandelt werden, alles andere im Dienste dieser Behandlung stehen. So habe ich denn z.B. ~~an die~~ Abschätzungen der Absolutwerte auf Vertikalen Geraden ganz fortgelassen.

II Allgemeines.

Zum ersten Mal findet sich die Zetafunktion – natürlich noch nicht unter diesem Namen – bei Euler, der ihren Zusammenhang mit den Primzahlen und somit ihre zahlentheoretische Bedeutung erkannte. Vor allem spricht Euler von ihr in seiner Arbeit:

„~~Introductio~~ Variae observationes circa series infinitas", L. Euler'i opera omnia, sub auspiciis soc. scient. naturalium Helveticae, Series prima, Vol. XIV p. 216-244.

Aber auch in seinem Werke:

„Introductio in analysin infinitorum" erwähnt er sie.

Die Zetafunktion tritt bei Euler als unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots \qquad = \zeta(n)$$

mit positiven ganzzahligen n auf. Mit $s = \sigma + it$ (an Stelle von n), (wo σ und t reell sind), dient diese Reihe auch heute in ihrem Konvergenzgebiet zur Definition der Zetafunktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{für } \Re(s) = \sigma > 1$$

Die komplexe Potenz n^s ist hierbei durch

$n^s = e^{s \log n}$ mit reellem $\log n$ definiert.

Die absolute Konvergenz für $\sigma > 1$ leuchtet ein, da nach der Definition

$|n^s| = n^\sigma$ ist.

Mit Hilfe eines Verfahrens, das sich bei Euler vielfach angewendet findet zur Verwandlung unendlicher Reihen in Produkte, hat er eine andere richtige Darstellung der Zetafunktion, die sogenannte „Eulersche Produktdarstellung", gefunden.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

$$-\frac{1}{2^s}\zeta(s) = -\frac{1}{2^s} - \frac{1}{4^s} - \frac{1}{6^s} - \cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

hier fehlen sämtliche Summanden mit einer, 2 als Faktor enthaltenden, Zahl im Nenner. - Die so erhaltene Reihe behandelt Euler ebenso, indem er $-\frac{1}{3^s}$ verwendet. Resultat:

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$$

In dieser Weise wird der Reihe nach mit allen Primzahlen verfahren. Da die rechte Seite für $\sigma > 1$ nach 1 konvergiert, ergibt sich bei unendlich fortgesetztem Verfahren

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod(1-\frac{1}{p^s})}$$ wo p die Primzahlen durchläuft, $\sigma > 1$ ist.

Nachdem die Zetafunktion viele Jahrzehnte hindurch unbeachtet geruht hatte, wurde diese Eulersche Produktdarstellung für Riemann zum Ausgangspunkt seiner 1859 erschienenen Untersuchungen:

„Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe."

Hier sucht Riemann einen angenäherten Ausdruck für die Funktion

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} p^0 = \sum_{p \leq x} 1$$, d. h. die Anzahl der Primzahlen $\leq x$, mit Hilfe der Zetafunktion zu finden. Der Zusammenhang zwischen $\zeta(s)$ und $\pi(x)$ wird hier folgendermaßen hergestellt. Es ist:

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2}\sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum_p p^{-3s} + \dots$$

Es wurde definiert:

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

Dann kann geschrieben werden:

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\left(f(n) - f(n-1)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right)$$

letzteres, weil $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(n)}{(n+1)^s}\right| = 0$ ist, wenn $\sigma > 1$.

Nun ist:

$$n^{-s} - (n+1)^{-s} = s\int_n^{n+1} x^{-s-1}\,dx$$

und $f(x)$ in diesem Integrationsintervall konstant. Daher ist:

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} f(x)\, x^{-s-1}\,dx$$

Mit Hilfe eines Fourierschen Satzes kann hieraus $f(x)$ durch ein Integral über eine Funktion von $\frac{1}{s}\log(\zeta(s))$ ausgedrückt werden, wobei sich an den Sprungstellen p^n von $f(x)$ der Mittelwert $\frac{f(p^n - \delta) + f(p^n + \delta)}{2}$, $\delta < 1$ ergibt.

Hierin wird nun $\log \zeta(s)$ mit Hilfe der Wurzeln der Zetafunktion als Summe dargestellt ($\zeta(s)$ selbst als Produkt) und so eine Abschätzung zu finden versucht.

Das führt also zur Frage nach den Nullstellen der Zetafunktion. Aber auch nach dieser von Riemann gegebenen Anregung hat es noch längere Zeit gedauert, bis weitere Fortschritte in der Erforschung der Funktion gemacht wurden. Erst in den 90-er Jahren wurde es in der Zeitschriftenliteratur bemerkbar, daß an diesem Problem gearbeitet wird.

III Überblick über Probleme und Resultate.

Was die Lage der Nullstellen von $\zeta(s)$ betrifft, so folgt zunächst aus der Eulerschen Darstellung

$$\frac{1}{\sum \frac{1}{n^s}} = \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

daß $\zeta(s)$ für $\sigma > 1$ nirgends gleich 0 sein kann, da ja das Produkt rechts in dieser ganzen Halb=Ebene konvergiert.

Um über die Halbebene $\sigma \leq 1$ Aufschluß zu erhalten, muß zunächst die Frage gelöst werden, ob $\zeta(s)$ überhaupt über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus fortsetzbar ist. – Es läßt sich mit Hilfe der Integraldarstellung der Gammafunktion eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung ableiten.

Es ist:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} e^z z^{-s} dz \qquad \text{für alle } s,\ z^{-s} = e^{-s \log z}, \text{ wo } \log z \text{ den Hauptwert hat.}$$

Der Integrationsweg L_ε führt von $-\infty$ nach $-\infty$ im positiven Sinn um den Punkt 0 herum etwa auf 2 Parallelen zur negativen reellen Achse im Abstand ε von dieser und dem sie verbindenden Halbkreis vom Radius ε um 0 herum in der Halbebene $\Re(z) \geq 0$.

Diese Darstellung von $\Gamma(s)$ ist von der Größe ε unabhängig. Daher kann man, ohne den Integrationsweg zu verändern, nz für z substituieren:

$$\frac{1}{\Gamma(s)\, n^{-s+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon} e^{nz} z^{-s} dz$$

oder

$$\frac{1}{n^s} = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon} e^{nz} z^{s-1} dz$$

Durch Summierung über n und den Beweis, daß die Summe rechts konvergiert, ergibt sich die in der ganzen Ebene gültige Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz$$

Diese Integraldarstellung gibt uns die Möglichkeit, weiteres über die Lage der Nullstellen von $\zeta(s)$ zu erfahren. Zunächst ergibt sich aus der Tatsache, daß das Integral eine ganze Funktion darstellt, daß $\zeta(s)$ nur dort Pole haben kann, wo die von $\Gamma(1-s)$ liegen, d.h. in den Punkten $s=1,2,3,\dots$ Wie wir aus der Konvergenz von $\sum \frac{1}{n^s}$ für $\sigma>1$ wissen, kommt nur $s=1$ inbetracht. Hier liegt tatsächlich der einzige Pol von $\zeta(s)$, weil das Integral nach dem Cauchy'schen Satz hier den Wert $-2\pi i$ annimmt, also nicht verschwindet. Das Residuum von $\zeta(s)$ ergibt sich hier zu $+1$, und es handelt sich um einen einfachen Pol.

Vor allem aber führt diese Integraldarstellung durch Betrachtung der Residuen des Integrals ~~an~~ in den Punkten

$$z = \pm 2h\pi i \quad (h = 1,2,3,\dots)$$

zu der Riemannschen Funktionalgleichung:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{\pi}{2}s\,\Gamma(s)\zeta(s)$$

die die Werte, die $\zeta(s)$ in zu $s=\frac{1}{2}$ symmetrisch gelegenen Punkten annimmt, mit Hilfe bekannter Funktionen miteinander verbindet. – Die Residuen in den genannten Punkten sind nämlich

$$-\frac{1}{h^{1-s}}(2\pi)^{s-1}e^{\pm\frac{i\pi}{2}(s-1)}$$

Summiert man sie, wobei $\sigma<0$ anzunehmen ist, so ergibt sich

$$-\zeta(1-s)(2\pi)^{s-1}\,2\cos\frac{\pi}{2}(s-1)$$

Diese Summe aber muß gleich sein

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\varepsilon^{(R)}}\frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}\,dz$$

wo $L_\varepsilon^{(R)}$ den rechts von der Geraden $\Re(z)=-R$ liegenden Teil von L_ε, ergänzt durch die Strecke dieser Geraden mit $\Im(z)\leqq\varepsilon$, bedeuten soll, wobei $\varepsilon<1$ sei. Auf der erwähnten Strecke ist der Integrand ~~für $\sigma<0$~~ beschränkt und strebt, (wenn $\sigma<0$ ist,) für $R\to\infty$ nach 0. Daher wird zunächst

$$\frac{-1}{\Gamma(1-s)}\zeta(s) = -\zeta(1-s).(2\pi)^{s-1}\,2\cos\frac{\pi}{2}(s-1)$$

und hieraus ergibt sich durch Anwendung der Formel

$$\Gamma(s).\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}$$

die Funktionalgleichung, die man nicht nur für $\sigma<0$ gilt, sondern als Relation zwischen analytischen Funktionen für alle s.

Aus der Funktionalgleichung erhalten wir nun erschöpfende Antwort auf die Frage nach den Nullpunkten von $\zeta(s)$ in $\sigma < 0$, d.h. von $\zeta(1-s)$ in $\sigma > 1$. $\zeta(1-s)$ kann nämlich nur verschwinden, wenn einer der Faktoren rechts in der Funktionalgleichung gleich 0 wird. $\zeta(s)$ wird für $\sigma > 1$ nicht Null; $\Gamma(s)$ hat keine Nullpunkte. $\cos\frac{\pi}{2}s$ aber wird für $s = 1, 3, 5, \ldots$ Null. Der erste dieser Nullpunkte wird durch den hier liegenden Pol von $\zeta(s)$ aufgehoben. $s = 3, 5, \ldots$ sind mithin die einzigen Nullpunkte von $\zeta(1-s)$ in $\sigma > 1$, d.h.

bei $s = -2, -4, \ldots -2n, \ldots$ liegen die einzigen, sogen. trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma < 0$.

Nun fragt sich nur noch, wo eventuelle Nullstellen im „kritischen Streifen" $0 \leq \sigma \leq 1$ liegen.

Da $\zeta(s)$ nach der Definition für reelle s reell ist, in konjugiert komplexen Punkten also konjugiert komplexe Werte annimmt, müssen diese „nichttrivialen" Nullstellen jedenfalls symmetrisch zur reellen Achse liegen; zufolge der Funktionalgleichung liegen sie, falls es überhaupt solche gibt, symmetrisch zum Punkt $s = \frac{1}{2}$, und beides zusammen läßt auf symmetrische Lage zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$, die die kritische Gerade genannt wird, schließen. Riemann hat die Vermutung ausgesprochen, die nichttrivialen Nullstellen lägen alle auf der ~~F~~ kritischen Geraden. Die Frage, ob diese Vermutung zutrifft, ist trotz der Arbeit bedeutender Mathematiker auf diesem Gebiet bis heute unbeantwortet. Als Namen, die in diesem Zusammenhang besonders bekannt sind, seien hier genannt: E. Landau, G. H. Hardy, J. E. Littlewood, H. Bohr. – Viele Ergebnisse sprechen aber für die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung, so z. B. der Nachweis, den Backlund (Dissertation, Helsingfors 1916) auf dem Wege numerischer Rechnungen geführt hat, daß die genau 79 nichttrivialen Nullstellen, für deren imaginären ~~reellen~~ Teil t gilt: $0 < t < 200$, sämtlich auf der kritischen Geraden liegen.

Im folgenden sei eine kleine Übersicht über die speziellen Probleme gegeben, die sich bei der Frage nach der Lage der nichttrivialen Nullstellen ergeben haben.

1. Schon Riemann hat das Problem beschäftigt, eine Abschätzung der Anzahl $N(T)$ der Nullstellen im Rechteck $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \sigma \leq 1$ zu finden.

2. Es ist bekannt, daß die obere Grenze Θ der reellen Teile der Wurzeln von $\zeta(s)$ nicht größer als 1 ist. Es fragt sich, ob nicht eine kleinere Schranke für Θ angegeben werden kann.

Als einzige Antwort auf diese Frage hat man gefunden, daß auf der Geraden $\sigma = 1$ selbst kein Nullpunkt liegt.

3. Aus dieser Tatsache folgt, da sich im Endlichen die Nullstellen nicht häufen können, die Existenz von, für wachsendes t nach Null strebenden, Funktionen $\varphi(t) > 0$ mit folgender Eigenschaft: $\zeta(s) \neq 0$ rechts von der Kurve

$$\sigma = 1 - \varphi(t)$$

Was für Funktionen kommen als solche $\varphi(t)$ in betracht?

4. Von Interesse ist natürlich die Frage, welcher Werte $\zeta(s)$ in gewissen Teilen des kritischen Streifens fähig ist. Es liegen Untersuchungen über den Wertevorrat auf vertikalen Geraden und Streifen vor.

5. Die Riemannsche Vermutung legt es nahe, besondere Aufmerksamkeit den Werten von $\zeta(s)$ in der Nähe und auf der kritischen Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ zu schenken. Nachdem Hardy bewiesen hatte, daß auf letzterer unendlich viele Nullstellen liegen, ergab sich das Problem, ihre Anzahl $M(T)$ abzuschätzen. Hierher gehört auch die Abschätzung der Zahl der Nullstellen, die im kritischen Streifen doch außerhalb eines sich an die Gerade $\sigma = \frac{1}{2}$ anlehnenden Gebietes liegen. Trifft die Riemannsche Vermutung zu, so muß diese Zahl $N_1(T)$ bis zu jeder Ordinate T gleich 0 sein.

6. Ein Problem besonderer Art ist noch folgendes: was für Folgerungen lassen sich ziehen, wenn man die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung annimmt?

Besteht die Vermutung zurecht, so kann man hoffen, auf diesem Wege einem Beweise näherzukommen. Trifft sie hingegen nicht zu, so kann man erwarten, daß auftretende Widersprüche das Problem klären.

Nun möchte ich einige Ergebnisse zusammenstellen, die bei der Erforschung obiger Fragen erarbeitet worden sind.

Zu 1.

Die von Riemann ohne Beweis gegebene Formel:

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

wurde zuerst von H. v. Mangoldt bewiesen und später der Beweis von Backlund auf eine hübsche, einfache Form gebracht. In der Formel bedeutet $O(\log T)$ eine Funktion $g(T)$, für die bei wachsendem ~~log~~ T $\left|\frac{g(T)}{\log T}\right|$ beschränkt bleibt. Allgemein bedeutet $g(x) = O(f(x))$, daß $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|$ beschränkt bleibt, $g(x) = o(f(x))$ hingegen, daß $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|$ mit wachsendem x nach 0 strebt.

Leicht zu behalten ist obige Formel, wenn man sie etwas anders schreibt:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T),$$

doch sind hier die einzelnen Glieder nicht streng nach ihrer Größenordnung geschieden.

Die Schwierigkeit des Beweises liegt vor allem in der Abschätzung des Integrals

$\int \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds$, erstreckt über eine zur reellen Achse parallele Strecke, die in den kritischen Streifen eindringt, wo der Integrand, wie bekannt ist, nicht beschränkt ist. Daß die Frage nach der Anzahl der Nullstellen zu diesem Integral führt, leuchtet unmittelbar ein, da ja das logarithmische Residuum diese Anzahl angibt. Der Gedankengang von Backlund bei der Abschätzung dieses mit dem Faktor $\frac{1}{2\pi i}$ auftretenden Integrals ist folgender. Das Resultat muß reell sein, also brauchen wir nur

$$\mathfrak{J}\int \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds$$

zu betrachten. Dies aber ist die Argumentsänderung von $\zeta(s)$ auf dem Integrationswege. Hat aber eine Argumentsänderung um 2π stattgefunden, so muß $\mathfrak{R}\zeta(s)$ mindestens einmal gleich 0 gewesen sein. Durch Konstruktion einer für bestimmte Werte mit $\mathfrak{R}\zeta(s)$ übereinstimmenden Funktion und Abschätzung ~~ihrer~~ der Anzahl ihrer Nullstellen in einem jene Werte umschließenden Kreise mit Hilfe ~~der~~ einer Jensenschen Formel ergibt sich eine obere Schranke für die Argumentänderung von $\zeta(s)$ auf dem Integrationswege, und diese Schranke genügt für den Beweis der Formel. – Über den Inhalt der Jensenschen Formel, die hier angewandt wird, sei gesagt, daß sie den Funktionswert in einem Punkte eines Kreisbereiches mit dem Poissonschen Integral über den Logarithmus ihrer Randwerte und Ausdrücken in Beziehung setzt, die mit Hilfe der Nullstellen und Pole im Kreise gebildet werden.

Eine bessere Restabschätzung zu finden, ist bisher nicht gelungen, sodaß die schon von Riemann vermutete Formel auch heute das genaueste Resultat in dieser Richtung gilt.

Zu 2.

Auf den Beweis, daß $\zeta(s) \neq 0$ auf $\sigma = 1$ ist, der von der Betrachtung der logarithmischen Residuen auf dieser Geraden ausgeht, möchte ich hier nicht näher eingehen. Es sei nur darauf aufmerksam gemacht, daß die Funktionalgleichung hieraus den Schluß

$$\zeta(s) \neq 0 \qquad \text{für } \sigma = 0$$

zu ziehen gestattet.

Zu 3.

Dieses Problem ist für die Primzahltheorie von Bedeutung. Ich möchte kurz darlegen, wie die Funktion $\varphi(t)$

für die Abschätzung der Differenz

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u},$$

d.h. mit andern Worten der Güte der Darstellung der Anzahl der Primzahlen $\leq x$ durch diesen „Integrallogarithmus", verwertet werden kann.

Es handelt sich um die Abschätzung der Größenordnung des Integrals

$$\int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\, ds$$

in bezug auf x; der Integrationsweg verläuft bei festem $\sigma = 2$ von $2-\infty i$ bis $2+\infty i$.

Ist eine Abschätzung dieses Integrals gefunden, so läßt sich folgendermaßen ein Übergang zu der oben erwähnten Differenz bewerkstelligen.

Es sei definiert

$$\Lambda(n) \begin{cases} = \log p \quad , \text{ wenn } n = p^m \text{, also Primzahlpot.} \\ = 0 \qquad\quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann kann, wie aus der Eulerschen Produktdarstellung von $\zeta(s)$ folgt (siehe auch S. 4. unten), geschrieben werden

$$\int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\, ds = - \int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\, ds$$

Es läßt sich zeigen, daß rechts Integration und Summierung vertauscht werden dürfen

$$\int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\, ds = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_{(2)} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2}\, ds = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log \frac{x}{n}$$

letzteres, da das Integral im mittleren Ausdruck für $\frac{x}{n} < 1$ verschwindet, sonst aber den Wert $\log \frac{x}{n}$ annimmt.

Die Summe

$$\sum_{p \leq x} \Lambda(p) \log \frac{x}{p} = \sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p}$$

kann als Teilsumme der obigen keinen größeren Wert als letztere annehmen – es gilt für sie daher dieselbe obere Abschätzung.

Von hier ist aber ein Übergang zur Summe $\sum_{p \leq x} \log p$ und weiter zu $\pi(x)$ möglich, wobei der Integrallogarithmus auftritt.

Nun aber zurück zur Abschätzung des Integrals

$$\int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\, ds$$

bei der die Kenntnis einer Funktion $\varphi(t)$ zustatten kommt. – Zur besseren Abschätzung der Größenordnung inbezug auf x wird man versuchen, den Integrationsweg weiter nach links zu verlegen, um so den reellen Teil des Exponenten von x möglichst klein zu machen.

Dazu befähigt uns aber die Kenntnis einer solchen Funktion $\varphi(t)$. Sie setzt uns nämlich in den Stand, den Integranden

$$\frac{x^s}{s^2}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds$$

auf einer der Kurve $\sigma = 1 - \varphi(t)$ ähnlichen links von der Geraden $\sigma = 1$ verlaufenden Kurve soweit genau nach oben abzuschätzen, daß auf ihr die Integration bis ins Unendliche erstreckt werden darf. – Mit Hilfe zweier wagrechter Strecken, die den ursprünglichen Integrationsweg $\sigma = 2$ mit diesem neuen verbinden und ins Unendliche rücken, und des Cauchy'schen Satzes können die über diese beiden Wege erstreckten Integrale in Zusammenhang miteinander gebracht werden, wobei natürlich der bei $s=1$ gelegene Pol des Integranden berücksichtigt werden muß. –

Das am weitesten gehende Resultat ist hier bisher folgendes:

$$\varphi(t) = \kappa\,\frac{\log\log t}{\log t}\quad,$$

wo $\varkappa$ eine geeignete Konstante bedeutet.

Zu 4.

Die Untersuchung dieses Problems kann sich auf die allgemeine Theorie Dirichlet'scher Reihen gründen. Die die Zetafunktion definierende unendliche Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist ja ein Spezialfall der allgemeinen Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{\lambda_n s}} \quad \text{wo } \lambda_n \text{ monoton bis } \infty \text{ wächst.}$$

Es läßt sich aber sogar auch die Euler'sche Produktdarstellung für die Untersuchung im kritischen Streifen verwerten, trotzdem das hier Produkt nicht konvergiert. Das beruht auf folgender Tatsache.

Es sei $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ gegeben. Dann ist für jedes feste $N \geq N_0(\sigma_0, \varepsilon, \delta)$ die Summe der Intervallängen von t zwischen den Grenzen $-T \leq t \leq T$, für die

$$\left| \frac{\zeta(\sigma_0 + it)}{\prod_{n=1}^{N}(1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)})^{-1}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad \text{gilt,}$$

so groß, daß das Verhältnis dieser Summe zur Gesamtlänge $2T$ größer als $1 - \delta$ ist — mit anderen Worten: auf dem größten Teil der Vertikalen läßt $\zeta(\sigma_0 + it)$ sich durch das Euler'sche Produkt beliebig genau approximieren.

Die hier erzielten Resultate sind sehr interessant. Sie lassen die Riemannsche Vermutung durchaus wahrscheinlich erscheinen.

Es zeigt sich nämlich zunächst, daß die Menge der auf jeder einzelnen Vertikalen im kritischen Streifen, $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$, angenommenen Werte in der ganzen komplexen Zahlenebene dicht liegt – d.h. also, $\zeta(\sigma_0 + it)$ kommt bei Veränderung der Werte von t jeder beliebigen komplexen Zahl beliebig nahe. – Betrachtet man aber anstelle einer Geraden einen schmalen Streifen $\sigma_0 - \delta \leq \sigma \leq \sigma_0 + \delta$, so ergibt sich, daß in der Menge der in ihm für jedes δ angenommenen Werte jede (komplexe) Zahl a mit der einen eventuellen Ausnahme $a = 0$ unendlich oft vorkommt.

Untersuchungen über die Zahl $N_{a,\alpha\beta}(T)$ der Stellen im Streifen $\frac{1}{2} < \alpha < \sigma < \beta < 1$, in denen ein bestimmter Wert a angenommen wird, haben das Resultat ergeben:

$$N_{a,\alpha,\beta}(T) = O(T) \quad ; \text{ für } a \neq 0 \text{ ist das die}$$

wahre Größenordnung dieser Zahl, d.h.

$$N_{a,\alpha,\beta}(T) \neq o(T) \quad \text{für } a \neq 0 .$$

Für $a = 0$ gilt aber ~~gerade~~

$$N_{0,\alpha,\beta}(T) = \cancel{o(T)}\ O(T^{1-4\alpha^2+\varepsilon}) \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0,$$

d.h. also, die Anzahl der Nullstellen in jedem vertikalen Streifen rechts von der kritischen Geraden ist höchstens gleich $O(T^{1-4\alpha^2+\varepsilon})$. Eine untere Abschätzung gibt es für $N_{0,\alpha,\beta}(T)$ nicht; sonst wäre ja die Riemannsche Vermutung widerlegt.

Hiermit ist gezeigt, daß außerhalb der kritischen Geraden und eines sie enthaltenden schmalen Streifens der Wert 0 zum mindesten unendlich viel seltener angenommen wird, als jeder andere:

$$\frac{N_{0,\alpha,\beta}(T)}{N_{a,\alpha,\beta}(T)} = o(T^0) = o(1)$$

oder anders geschrieben

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N_{0,\alpha,\beta}(T)}{N_{a,\alpha,\beta}(T)} = 0$$

Diese Betrachtungen leiten schon zu dem Fragenkreis 5. hinüber.

Zu 5.

Aus der eben angegebenen Abschätzung

$$N_{0,\alpha,\beta}(T) = O(T^{1-4\alpha^2+\varepsilon}),$$

die für jeden Streifen $\alpha<\sigma<\beta$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 gilt, kann geschlossen werden, daß auch die Menge aller außerhalb des Streifens $\frac{1}{2}-\delta<\sigma<\frac{1}{2}+\delta$ gelegener Nullstellen von derselben Ordnung ist. Denn die Existenz von $\varphi(t)$ zeigt, daß sich zu jedem T ein $\beta<1$ angeben läßt, für welches für die Anzahl $N_1(T)$ der Nullstellen außerhalb $\frac{1}{2}-\delta<\sigma<\frac{1}{2}+\delta$ bis zur Ordinate T gilt:

$$N_1(T) = 2 \cdot N_{0,\delta,p}(T) \quad \text{also} = O(T^{1-4\delta^2+\varepsilon})$$

Da wir in der unter 1. erwähnten Riemann-v. Mangoldtschen Formel eine Abschätzung der Gesamtanzahl der Wurzeln von $\zeta(s)=0$ im kritischen Streifen besitzen, so läßt sich nun eine untere Grenze für die Anzahl $N(T)-N_1(T)$ angeben, d. h. für die auf oder in „unmittelbarer Nähe" der kritischen Geraden gelegenen Nullstellen.

Bis zur Ordinate T liegen ~~mindesten~~ höchstens

$$O(T^{1-4\delta^2+\varepsilon})$$

außerhalb des Streifens $\frac{1}{2}-\delta<\sigma<\frac{1}{2}+\delta$. – Im ganzen gibt es bis zu dieser Ordinate mindestens

$$\frac{1}{2\pi} T\log T - \frac{1+\log 2\pi}{2\pi} T - |O(\log T)|$$

Nullstellen, wobei ich mit der Schreibweise des letzten Summanden andeuten möchte, daß ich mir das Restglied, um jedenfalls nicht zu hoch zu greifen, negativ denke. Es sind dabei nur die Nullstellen zu einer Seite der reellen Achse berücksichtigt. – Also ist $N(T)-N_1(T)$ mindestens

$$\frac{1}{2\pi} T\log T - \frac{1+\log 2\pi}{2\pi} T - |O(T^{1-4\delta^2+\varepsilon})|$$

Dieses Resultat spricht für die Riemannsche Vermutung, obgleich ja damit noch nicht bewiesen ist, daß auch nur eine einzige Nullstelle wirklich auf der kritischen Geraden liegt. Das ist also ein Problem, das sich jetzt vor allem aufdrängt: lassen sich auf $\sigma = \frac{1}{2}$ Nullstellen nachweisen?

Ein einfacher Weg, der zu einem solchen Nachweis führen könnte, wäre folgender.

Die Funktion

$$\eta(s) = \Gamma(\tfrac{s}{2})\,\zeta(s)\,\pi^{-\frac{s}{2}}$$

verschwindet an den nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion und nur an diesen. Für reelles s ist sie reell. Es gilt:

$$\eta(s) = \eta(1-s),$$

wie sich mit Hilfe der Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ und der beiden Formeln

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \text{und}$$

$$\Gamma(s)\,\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,2^{1-2s}\,\Gamma(2s)$$

leicht zeigen läßt. - Aus

$$\eta(\tfrac{1}{2}+ti) = \eta(\tfrac{1}{2}-ti) = \bar{\eta}(\tfrac{1}{2}+ti),$$

d.h. aus der Gleichheit von $\eta(\frac{1}{2}+ti)$ mit der hierzu konjugiert komplexen Zahl, folgt, daß $\eta(s)$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$ reell ist. Es braucht also nur ein Zeichenwechsel von $\eta(s)$ auf der kritischen Geraden nachgewiesen zu werden, damit das Vorhandensein einer Nullstelle mit $\sigma = \frac{1}{2}$ feststünde. Da aus der Definition der Funktion $\Gamma(s)$ durch den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

folgt, daß $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ ist, für $\zeta(\frac{1}{2})$ sich aber ein negativer Wert ergibt, wie aus der bisher noch nicht erwähnten, mit Hilfe der Eulerschen Summenformel erhältlichen Integraldarstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^\infty \frac{P_1(x)}{x^{s+1}}\,dx \qquad \text{für } \sigma > 0$$

folgt, wobei $P_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$ ($[x]$ – die größte ganze Zahl $\leq x$)

so ist

$$\eta(\tfrac{1}{2}) < 0$$

Es müßte daher nur für irgend ein t

$$\Gamma(\tfrac{1}{2} + \tfrac{t}{2}i)\,\zeta(\tfrac{1}{2} + ti)\,\pi^{-\frac{1}{4} - \frac{t}{2}i} > 0$$

nachgewiesen werden.

Mit Hilfe eines Integrals über diesen, noch mit einem verkleinernden Faktor versehenen, Ausdruck, das von T bis $2T$ erstreckt wird, läßt sich aber ein viel mehr aussagendes Resultat erzielen, daß nämlich der Integrand für $t > T$ das Vorzeichen wechselt, wie groß T auch gewählt werden mag. Das Integral wird durch Anwendung des Cauchy'schen Satzes auf das Rechteck mit den Ecken $\frac{1}{2} + Ti$, $\frac{1}{2} + 2Ti$, $a + 2Ti$, $a + Ti$, wo a eine gewisse Zahl > 1 ist, abgeschätzt. Bezeichnet man den Integranden mit $f(\frac{1}{2} + ti)$, so folgt aus der Annahme

$$f(\tfrac{1}{2} + ti) \neq 0 \quad \text{für } t > T$$

$$\left|\int_T^{2T} f(\tfrac{1}{2} + ti)\,dt\right| = \int_T^{2T} |f(\tfrac{1}{2} + ti)|\,dt$$

Das führt zu einem Widerspruch, wenn man hieraus eine Abschätzung von

$$\int_T^{2T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+ti)|\,dt$$

ableitet, einem Integral, das durch Anwendung des Cauchy'schen Satzes auf ein Rechteck derselben Art, wie das oben erwähnte, eine Abschätzung nach unten gestattet.

Das Ergebnis, zu dem dieser Widerspruch führt, ist der Hardy'sche Satz: auf $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen unendlich viele Nullstellen (übrigens ungerader Ordnung) von $\zeta(s)$.

Die Arbeit an dem hier sofort anknüpfenden Problem, die Größenordnung der Anzahl $N(T)$ dieser auf $\sigma = \frac{1}{2}$ bis zur Ordinate T liegenden Nullstellen abzuschätzen, hat zu immer besseren Ergebnissen geführt. 1921 bewiesen Hardy und Littlewood, daß

$$N(T) > KT \quad \text{für geeignetes } K$$

und genügend großes T. Die wahre Größenordnung liegt also zwischen den Grenzen $O(T)$ und $O(T\log T)$.

Dies Ergebnis gehört wohl zu den kräftigsten Argumenten, die man für die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung anführen kann.

Zu 6.

Als Beispiel dafür, wie man mit der Voraussetzung der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung in manchen Fragen weitergehende Resultate erhalten kann – die meisten hier behandelten Probleme werden gegenstandslos – sei die Abschätzung des Restglieds $R(T)$ in der Riemann-v. Mangoldtschen Formel für $N(T)$ erwähnt. – Streng gesichert ist bloß

$$R(T) = O(\log T)$$

Hier aber ergibt sich als obere Abschätzung

$$R(T) = O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

und nach unten

$$R(T) \neq O((\log T)^c)$$, wenn $0 < c < 1$ geeignet gewählt wird, sodaß hier die Grenzen ganz eng gezogen sind.

Interessant ist es, daß manche zahlentheoretischen Sätze sich bisher nur unter Anwendung der Riemannschen Vermutung haben beweisen lassen, z. B. Sätze, die mit der Goldbachschen Vermutung zusammenhängen, jede ~~ganze~~ grade Zahl > 2 lasse sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.

Zum Schluß möchte ich noch kurz die Frage anschneiden, worin denn eigentlich das Hindernis besteht, das die Versuche scheitern läßt, die Riemannsche Vermutung zu beweisen.

Am nächsten liegt es wohl, vom Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds$$

erstreckt über das Rechteck mit den Ecken $1+ai$, $1+Ti$, $\frac{1}{2}+\delta+Ti$, $\frac{1}{2}+\delta+ai$ mit $a>0$, auszugehen; gibt dieses doch durch seinen Wert unmittelbar die Anzahl der Nullstellen innerhalb des umlaufenen Rechtecks an.

Trifft die Vermutung zu, so muß dieses Integral gleich 0 sein und diesen Wert für beliebig kleines $\delta>0$ und nach ∞ strebendes T beibehalten.

Nun ist aber der Integrand im kritischen Streifen nicht beschränkt, wie wir aus der Tatsache wissen, daß $\zeta(s)$ hier der 0 unendlich oft beliebig nahe kommt.

Man könnte auf den Gedanken kommen, nach dem Muster des Backlundschen Beweises des Riemann-v.-Mangoldtschen Satzes die Argumentänderung von $\zeta(s)$ betrachten zu wollen. Doch haben wir es hier mit einem Integrationswege zu tun, der ins Unendliche wächst, wenn T nach ∞ strebt, während es sich für Backlund ~~um~~

um die Argumentänderung auf einer kurzen Strecke handelte, mithin auch um die Anwendung der Jensenschen Formel auf einen kleinen Kreis. - Auch ist es mit Sicherheit anzunehmen, daß die Argumentänderung auf einer Vertikalen im kritischen Streifen sehr kompliziert verläuft. Es folgt ja aus der Tatsache, daß in der „Nachbarschaft" einer solchen Geraden jeder von 0 verschiedene Wert unendlich oft angenommen wird, sofort, daß der Wert von $\zeta(s)$ auf der Geraden sich jedem unendlich oft beliebig nähert.

Die benützte Literatur

Bohr und Cramér Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie

Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften II C 8.

Bieberbach Lehrbuch der Funktionentheorie Band II

Landau Vorlesungen über Zahlentheorie Band I u. II

Euler Variae observationes circa series infinitas.

L. Euleri opera omnia, sub ausp. soc. sc. nat. Helveticae. Series prima, Vol. XIV p. 216 - 244

Riemann Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe.

Bohr Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen.

Acta Mathematica 40 (1916)

Backlund Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

Dissertation, Helsingfors 1916

Außerdem eine Reihe von Aufsätzen, deren Resultate sich in den drei ersten hier genannten Arbeiten wiederfinden.